

ОСЦИЛЛЯТОР С СУХИМ ТРЕНИЕМ

I. Собственные и резонансные вынужденные колебания

Бутиков Евгений Иванович

Аннотация

В работе аналитически и с помощью компьютерного моделирования исследуются собственные и резонансные вынужденные колебания торсионного пружинно-го осциллятора с сухим и вязким трением. Используется упрощенная (кулоновская) математическая модель сухого трения, которая, тем не менее, позволяет успешно объяснить многие особенности поведения различных колебательных систем с сухим трением. Показано, что под действием сухого трения амплитуда собственных колебаний убывает со временем по линейному закону, и движение осциллятора полностью прекращается после совершения конечного числа циклов. Амплитуда вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением при резонансном синусоидальном возбуждении неограниченно возрастает, если превышен порог возбуждения. Во второй части статьи рассмотрены особенности вынужденных колебаний, возбуждаемых на нерезонансных и субрезонансных частотах.

Ключевые слова: сухое трение, собственные колебания, синусоидальное возбуждение, резонанс, вынужденные колебания, порог возбуждения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Механические колебательные системы с комбинированным сухим и вязким трением имеют важное значение для многих технических приложений динамики. В случае чисто вязкого трения пружинные колебательные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями. Такие механические системы допускают исчерпывающее аналитическое исследование, и только они обычно включаются в учебники по общей физике и подробно рассматриваются при изучении динамики в вузах. Влияние сухого трения на поведение колебательных систем остается, как правило, за пределами учебной литературы и традиционных курсов физики.

Наличие сухого трения неизбежно приводит к нелинейности физической системы. Описывающие систему дифференциальные уравнения утрачивают непрерывный характер. Когда коэффициент сухого трения достаточно мал, подвижная часть осциллятора, подверженного синусоидальному возбуждению, при вынужденных колебаниях скользит так, что его скорость обращается в нуль только в те моменты, когда изменяется направление движения. Такой тип движения без остановок конечной длительности обычно называют чистым скольжением. Но при достаточно сильном сухом трении возмож-

ны «залипания»: после обращения скорости в нуль осциллирующее тело перед возобновлением движения остается в состоянии покоя в течение конечного промежутка времени.

Сухое трение как причина нелинейности находится в фокусе современных исследований динамических систем. Даже простейшая модель сухого трения, основанная на законе Кулона – Амонтона, может объяснить многие характерные особенности поведения систем с сухим трением. Затухание собственных колебаний под действием сухого трения очень наглядно описано в известной книге Пипшарда [1] (см. также [2]). В 1930 году в пионерской работе Ден Хартога [3] впервые было получено решение для вынужденного движения гармонически возбуждаемого осциллятора с сухим и вязким трением в виде периодического отклика без «залипаний». В последующие годы аналитические решения, описывающие такие колебания без «залипаний», широко обсуждались в научной литературе (см., например, [4]–[7]). В наше время повышенный интерес вызывают периодические и хаотические движения в разрывных динамических системах по причине их важной роли в технических приложениях (см., например, [8] и указанную там литературу).

Аналитические решения задачи о колебаниях осциллятора с сухим трением обычно находят простым методом поэтапного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемую систему. Если используется простейшая (кулоновская) модель сухого трения, для промежутков времени между последовательными точками поворота соответствующие уравнения линейны. Эти промежутки заключены между моментами времени, в которые скорость обращается в нуль. Полное решение получается «сшиванием» («припасовыванием» по выражению академика Л.И. Мандельштама) этих решений для соседних полуциклов на примыкающих промежутках времени. Благодаря кусочно-линейному характеру соответствующих дифференциальных уравнений можно использовать явные аналитические решения для интервалов времени между последовательными точками поворота.

Предлагаемый нами подход к решению задачи базируется прежде всего на физической стороне исследуемых явлений. В этой статье мы рассматриваем собственные колебания торсионного пружинного осциллятора, а также кинематически возбуждаемые вынужденные колебания осциллятора с сухим и вязким трением, происходящие под действием синусоидального внешнего момента резонансной частоты. Математически такая система эквивалентна удерживаемому пружиной массивному телу на подставке, совершающей заданные горизонтальные колебания по синусоидальному закону. Найденные аналитические решения подтверждаются графиками, полученными в результате компьютерного моделирования. Упрощенная версия соответствующей программы (Java-апплет) доступна в сети [9].

2. МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В используемой модели торсионного пружинного осциллятора подвижная часть представляет собой уравновешенный маховик (ротор), центр масс которого расположен на оси вращения (рис. 1). При повороте маховика происходит закручивание прикрепленной к нему спиральной пружины. Это устройство подобно балансовому механизму (пружинному маятнику) механических наручных или карманных часов.

Другой конец пружины прикреплен к стержню (шатуну), который под действием внешней силы может поворачиваться вправо-влево на некоторый угол вокруг общей с

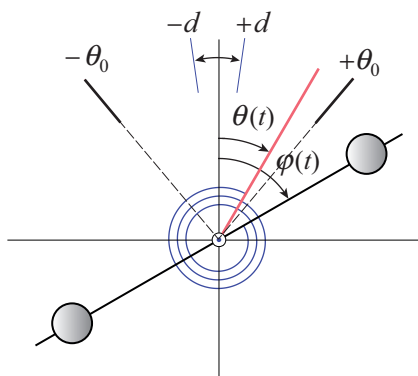


Рис. 1. Схема устройства механического торсионного осциллятора с сухим трением

маховиком оси. При одинаковой ориентации ротора и шатуна пружина не деформирована, то есть маховик находится в положении равновесия. Другими словами, мы считаем, что маховик находится в равновесии (пружина не напряжена), когда стержень ротора параллелен шатуну. При повороте шатуна или ротора на маховик со стороны пружины действует возвращающий момент сил, который, согласно закону Гука, пропорционален углу закручивания пружины, то есть углу отклонения маховика от положения шатуна.

Собственные колебания ротора в данной системе можно наблюдать в условиях, когда шатун закреплен неподвижно, например, в положении $\theta = 0$ (рис. 1). Для возбуждения собственных колебаний осциллятор нужно вывести из состояния равновесия внешним воздействием, сообщив ротору некоторое начальное отклонение и/или начальную угловую скорость. После прекращения внешнего воздействия ротор совершает собственные колебания только под действием силы натяжения пружины и сил трения.

Колебания осциллятора называют вынужденными, когда он подвержен периодическому внешнему воздействию, влияние которого на физическую систему описывается отдельным слагаемым в дифференциальном уравнении. Соответствующий член должен быть периодической функцией времени. Нас интересует отклик системы на такое периодическое внешнее воздействие. Поведение колебательных систем, подверженных периодическим внешним силам, представляет собой один из наиболее важных вопросов теории колебаний. Отличительная черта вынужденных колебаний – это явление резонанса. При резонансе сравнительно малое внешнее воздействие может привести к чрезвычайно сильному отклику осциллятора. Резонанс в физике встречается очень часто, так что глубокое понимание этого фундаментального явления необходимо для анализа самых разных его проявлений. Явление резонанса определяется характером зависимости внешнего воздействия от времени на всем его протяжении, а не в какой-то определенный момент.

Вынужденные колебания в рассматриваемой системе происходят, когда возбуждающий шатун принудительно поворачивают вправо-влево относительно среднего положения $\theta = 0$ по синусоидальному закону между углами $-\theta_0$ и θ_0 (см. рис. 1): $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$. Такой способ возбуждения можно назвать *кинематическим*, потому что в нем явно задается не внешняя сила, а принудительное движение некоторой части системы (возбуждающего шатуна) по определенному закону. Кинематический способ особенно удобен для моделирования, потому что движение возбуждающего шатуна можно наблюдать одновременно с колебаниями маховика.

В данной статье мы сосредоточим внимание на особенностях затухания собственных колебаний и особенностях резонанса в системах с сухим трением. Случай сухого трения интересен с точки зрения практических приложений. В нашей модели механического торсионного осциллятора сухое трение может возникать при повороте оси маховика в подшипниках, удерживающих ось.

Упрощенная модель сухого трения основана на приближенном эмпирическом законе Кулона –Амонтона, согласно которому величина силы трения почти постоянна (не зависит от скорости), пока система находится в движении, а направление силы трения противоположно скорости. Идеализированная характеристика кулоновского сухого трения (называемая z-характеристикой) показана на рис. 2. В соответствии с этой характеристикой при движении сила трения постоянна по модулю, но ее направление изменяется всякий раз при изменении направления скорости. Когда система покоится, момент силы статического трения, действующий в подшипниках на ось ротора, может принимать любое значение от $-N_{\max}$ до N_{\max} . Действительная величина момента силы трения покоя зависит от других приложенных сил, которые должны быть уравновешены трением, для того чтобы сохранялось состояние покоя. Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя N_{\max} .

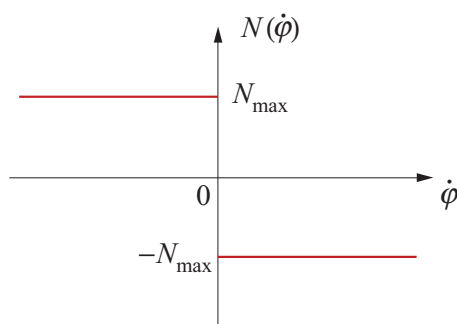


Рис. 2. Идеализированная характеристика момента силы сухого трения (z-характеристика)

Из-за того что момент силы трения покоя может принимать любые значения вплоть до N_{\max} , по обе стороны от положения равновесия (в котором спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения ротора, в пределах которого трение покоя в состоянии уравновесит силу натяжения деформированной пружины. Этот интервал называют *зоной застоя* или *мертвой зоной*. Зона застоя простирается на одинаковые расстояния в обе стороны от точки, в которой пружина не деформирована. Чем сильнее трение покоя в рассматриваемой системе, тем шире мертвая зона. Ее границы определяются максимальным значением момента силы трения покоя N_{\max} . На рис. 1 левая и правая границы мертвой зоны обозначены как $-d$ и d соответственно (при среднем положении шатуна $\theta = 0$).

В любой точке мертвой зоны ротор осциллятора может находиться в покое в состоянии безразличного равновесия, в противоположность случаю вязкого трения, когда имеется только одно положение равновесия, в котором пружина не деформирована.

В реальных системах сухое трение характеризуется более сложной зависимостью силы трения от скорости (см., например, [10]–[11]). Предельная величина силы трения покоя обычно несколько больше силы трения скольжения. Когда скорость движения на-

чинает возрастать от нулевого значения, сила трения скольжения сначала несколько уменьшается, достигает минимума при некоторой скорости, а затем постепенно увеличивается по мере дальнейшего роста скорости. В идеализированной z-характеристике сухого трения эти особенности игнорируются. Тем не менее, принятая идеализация позволяет объяснить многие существенные особенности вызванного сухим трением процесса затухания колебаний в реальных физических системах.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

На вращающийся ротор торсионного пружинного осциллятора в общем случае действуют одновременно возвращающий момент $-D(\varphi - \theta)$ упругой силы закрученной пружины, пропорциональный углу закручивания $(\varphi - \theta)$, момент $-B\dot{\varphi}$ силы вязкого трения, пропорциональный угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$, и момент $N_{\text{тр}}$ силы сухого трения скольжения. Дифференциальное уравнение вращения ротора с моментом инерции J имеет следующий вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D(\varphi - \theta_0 \sin \omega t) - B\dot{\varphi} + N_{\text{тр}}. \quad (1)$$

В соответствии с принятой идеализированной z-характеристикой сухого трения, момент силы трения скольжения $N_{\text{тр}}$ направлен противоположно угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$ и остается постоянным до тех пор, пока продолжается вращение ротора в одном направлении. Однако момент сил трения может принимать любое значение из интервала от $-N_{\text{max}}$ до N_{max} , если скорость ротора равна нулю:

$$N_{\text{тр}}(\dot{\varphi}) = \begin{cases} -N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} > 0, \\ N_{\text{max}} & \text{для } \dot{\varphi} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

или $N_{\text{тр}} = -N_{\text{max}} \text{sign}(\dot{\varphi})$. Здесь N_{max} – предельное (максимальное) значение момента сил сухого трения. Удобно выразить N_{max} через максимальный угол d отклонения маховика, при котором он еще может находиться в состоянии покоя, когда возбуждающий шатун расположен в среднем положении $\theta = 0$: $N_{\text{max}} = Dd$ (см. рис. 1). Очевидно, что угол d соответствует границе зоны застоя.

Разделив все члены уравнения (1) на J , получаем

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 d \text{sign} \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

Частота $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ характеризует собственные колебания ротора в отсутствие затухания. Постоянная затухания γ служит мерой интенсивности вязкого трения в системе. Здесь она введена соотношением $2\gamma = B/J$. Вместо постоянной затухания часто используют обратную ей безразмерную величину $Q = \omega_0/2\gamma$, называемую добротностью осциллятора. Подразумевается, что функция $\text{sign} \dot{\varphi}$ при нулевом аргументе (что физически соответствует моментам остановки ротора) может принимать неопределенное значение из интервала $(-1, 1)$. При этом истинное значение момента силы сухого трения покоя таково, что он уравновешивает момент силы упругости, и ротор находится в состоянии равновесия.

Дифференциальное уравнение (1) (или (3)), описывающее осциллятор с сухим трением, вообще говоря, *нелинейно*, потому что момент силы сухого трения $N_{\text{тр}}(\dot{\varphi})$ изменяется скачкообразно в те моменты времени, когда изменяется знак угловой скорости ротора

$\dot{\varphi}$, то есть когда изменяется направление его вращения. В случае идеализированной z -характеристики это кусочно-непрерывная система, так что можно рассматривать по сути дела два линейных уравнения вместо одного:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi + d) = \omega_0^2\theta_0 \sin \omega t \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0, \quad (4)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi - d) = \omega_0^2\theta_0 \sin \omega t \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0. \quad (5)$$

Нелинейный характер задачи проявляется здесь в том, что мы должны переходить от одного из линейных уравнений (4)–(5) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

4. ЗАТУХАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СУХОМ ТРЕНИИ

В случае собственных колебаний правая часть уравнений (4)–(5) равна нулю. Частота $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ собственных колебаний и постоянная затухания $\gamma = B/(2J)$ определяются только свойствами осциллятора и не зависят от начальных условий, то есть не зависят от способа возбуждения собственных колебаний. Напротив, значения амплитуды и фазы собственных колебаний зависят от начального механического состояния системы, то есть от угла отклонения ротора и его угловой скорости в момент прекращения внешнего воздействия.

Если сухое трение полностью отсутствует, то есть ширина зоны застоя равна нулю ($d = 0$), затухание собственных колебаний пружинного осциллятора происходит только из-за вязкого трения. В такой идеализированной системе затухание описывается *линейным* дифференциальным уравнением, которое имеет хорошо известное аналитическое решение. Согласно этому решению, амплитуда собственных колебаний убывает со временем экспоненциально. Это означает, что отношение соседних максимальных отклонений ротора постоянно, и вся их последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию.

В рамках такой идеализированной модели затухание собственных колебаний формально продолжается бесконечно долго, а их амплитуда асимптотически приближается к нулю. Длительность процесса экспоненциального затухания принято характеризовать постоянной затухания (показателем затухания) γ или обратной величиной $\tau = 1/\gamma$, называемой временем затухания. Эта условная длительность затухающих колебаний представляет собой промежуток времени, на протяжении которого амплитуда колебаний уменьшается на множитель $e \approx 2.72$.

Экспоненциальный характер затухания колебаний под действием вязкого трения обусловлен тем, что сила трения пропорциональна скорости. Любая другая зависимость силы трения от скорости порождает затухание колебаний с иной зависимостью амплитуды от времени. Важная отличительная черта затухания колебаний под действием силы сухого трения заключается в том, что движение полностью прекращается после конечного числа циклов. Пока осциллятор совершает колебания, знак скорости периодически изменяется, и каждое очередное изменение направления скорости происходит при все меньшем отклонении от средней точки зоны застоя. В конце концов точка поворота оказывается внутри зоны застоя, где трение покоя в состоянии уравновесить возвращающую силу пружины. В этот момент движение полностью прекращается. Таким образом, если угловая скорость ротора обращается в нуль где-либо в пределах зоны застоя, ротор останавливается и в дальнейшем покоится в этой точке. В какой именно

точке произойдет остановка, зависит от начальных условий, которые могут меняться от случая к случаю.

Эти особенности присущи различным механическим системам с сухим трением. В частности, сухое трение может присутствовать в стрелочных измерительных приборах, таких как гальванометры с подвижной катушкой. В типичном гальванометре легкая проволочная катушка помещена в магнитное поле между полюсами постоянного магнита и может поворачиваться вокруг оси, закрепленной в подшипниках. При прохождении измеряемого тока катушка поворачивается и закручивает спиральную пружину. Если со стороны подшипников на катушку действует момент сил сухого трения, стрелка прибора может остановиться в любой точке зоны застоя, окружающей с двух сторон деление шкалы, соответствующее измеряемой величине. Этим объясняется возникновение случайных ошибок, неизбежно сопутствующих измерениям, выполняемым при помощи стрелочных приборов. Чем сильнее сухое трение, тем больше погрешности измерений.

4.1. Графики колебаний, затухающих под действием сухого трения

Решение уравнений (4)–(5) при $\theta_0 = 0$ и конечной ширине зоны застоя ($d \neq 0$), соответствующее заданным начальным условиям, можно найти методом поэтапного интегрирования каждого из линейных уравнений на интервале времени, соответствующем полупериоду колебаний, пока направление вращения ротора остается неизменным. Затем эти решения соединяются вместе («сшиваются», «припасовываются») в моменты перехода от одного уравнения к другому таким образом, что угол отклонения и угловая скорость в конце очередного полупериода выполняют роль начальных условий для следующего полупериода колебаний ротора. Такая последовательность решений продолжается до тех пор, пока угол отклонения в конце очередного полупериода не оказывается в пределах мертвой зоны.

Чтобы выявить основные особенности затухания колебаний, вызванного сухим трением, будем сначала предполагать, что вязкое трение полностью отсутствует ($\gamma = 0$).

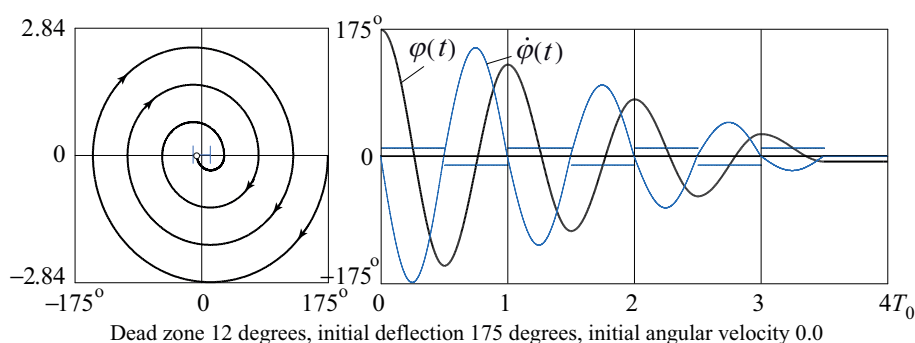


Рис. 3. Фазовая траектория (слева) и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ (справа) в случае собственных колебаний, затухание которых обусловлено только сухим трением

Пусть в начальный момент $t = 0$ ротор повернут вправо (по часовой стрелке) от положения равновесия, так что $\varphi(0) > 0$. Если это начальное отклонение выходит за границу зоны застоя, то есть $\varphi(0) > d$, ротор, будучи освобожденным без толчка, то есть с нулевой начальной скоростью, начнет двигаться влево ($\dot{\varphi} < 0$), и его движение будет описывать-

ся уравнением (5). Решение уравнения (5) представляет собой простое гармоническое колебание с частотой ω_0 . Среднее положение, около которого происходят эти колебания, совпадает с правой границей зоны застоя d . Это смещение среднего положения колебаний ротора вызвано постоянным моментом силы сухого трения, который действует на ротор вправо (по часовой стрелке), пока он движется влево. При данных начальных условиях ($\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$) амплитуда колебания около средней точки d равна $\varphi_0 - d$. Первый отрезок графика таких колебаний на рис. 3 представляет собой часть синусоиды со средней точкой, смещенной вверх от оси абсцисс на расстояние d . Крайнее отклонение ротора влево в конце первого полупериода колебаний равно $\varphi(0) - 2d$.

Когда ротор достигает этого положения, его угловая скорость обращается в нуль. Затем он начинает двигаться вправо. Поскольку при этом его угловая скорость $\dot{\varphi}$ положительна, мы должны перейти к уравнению (4). Значения φ и $\dot{\varphi}$ в конце предыдущего полупериода служат начальными условиями для дальнейшего движения. Это движение опять представляет собой половину цикла гармонического колебания той же самой частоты ω_0 , но средняя точка колебаний теперь смещена к левой границе зоны застоя $-d$. Амплитуда соответствующего сегмента синусоиды равна $\varphi_0 - 3d$.

Продолжая дальше такой анализ движения, мы заключаем, что в последующие полупериоды ротор совершает гармонические колебания около средних точек, поочередно смещенных к границам мертвой зоны d и $-d$. Каждому полупериоду соответствует одна и та же частота ω_0 (частота собственных колебаний в отсутствие трения). Поэтому длительность каждого цикла затухающих колебаний равна периоду $T_0 = 2\pi/\omega_0$ собственных колебаний осциллятора в отсутствие трения.

«Сшивание» синусоидальных сегментов, средние точки которых поочередно смещены к правой и левой границам мертвой зоны, дает всю кривую процесса затухания колебаний под действием сухого трения, показанную на рис. 3. После каждого полного цикла таких колебаний максимальное отклонение ротора уменьшается на одну и ту же величину, равную удвоенной ширине зоны застоя (то есть на величину $4d$). Колебания продолжаются до тех пор, пока конечная точка очередного сегмента синусоиды не окажется внутри зоны застоя ($-d, d$).

Таким образом, в случае затухания под действием сухого трения максимальные отклонения ротора убывают по линейному закону. Последовательность максимальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию, и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов, в противоположность случаю вязкого трения, когда максимальные отклонения убывают в геометрической прогрессии (экспоненциально), и формально движение продолжается бесконечно долго.

4.2. Фазовая траектория затухающих собственных колебаний

Общие закономерности затухания колебаний под действием сухого трения отчетливо отражает фазовая траектория в левой части рис. 3. В начальный момент ротор имеет нулевую скорость ($\dot{\varphi}(0) = 0$) и отклонен вправо за пределы зоны застоя ($\varphi(0) = \varphi_0 > d$). Это начальное состояние представлено крайней правой точкой на оси абсцисс (оси φ). Начальный участок фазовой траектории, лежащий ниже горизонтальной оси, представляет движение ротора в течение первого полупериода колебаний, пока ротор поворачивается влево. Эта кривая представляет собой нижнюю половину эллипса (или окружности, если масштабы выбраны соответствующим образом). Центр эллипса находится на оси абсцисс в точке d , которая соответствует правой границе зоны застоя.

Вторая половина цикла колебаний, на протяжении которой ротор поворачивается вправо и его угловая скорость положительна, представлена половиной эллипса, расположенной над осью абсцисс. Центр этого полуэллипса находится в точке $-d$ оси φ . Вся фазовая траектория образована такими полуэллипсами постепенно уменьшающихся размеров, центры которых поочередно расположены в точках d и $-d$ оси абсцисс. Горизонтальный диаметр очередного полуэллипса на $2d$ меньше, чем у предыдущего. Фазовая траектория обрывается на оси φ в первой же точке, где скорость обращается в нуль в пределах мертвой зоны (между точками d и $-d$).

Интересно сравнить эту фазовую траекторию со случаем затухания колебаний под действием вязкого трения. При вязком трении кривая скручивается в спираль вокруг начала координат фазовой плоскости. Фазовая траектория асимптотически приближается к этому фокусу и состоит из бесконечного числа постепенно сближающихся, все более тесных витков уменьшающегося размера. В случае сухого трения фазовая кривая образована конечным числом эквидистантных витков: она заканчивается (обрывается), как только достигает оси абсцисс в пределах отрезка $(-d, d)$, соответствующего мертвой зоне.

Если наряду с сухим трением осциллятор подвержен действию сравнительно небольшого вязкого трения ($\gamma < \omega_0$), полуэллипсы фазовой траектории превращаются в отрезки слабо скручивающихся спиралей, соответствующих собственным затухающим колебаниям осциллятора с положением равновесия, поочередно смещенным к правой и левой границам зоны застоя. Витки фазовой траектории перестают быть эквидистантными. Но тем не менее скручивание фазовой траектории не продолжается до бесконечности: в этом случае она также обрывается после конечного числа оборотов вокруг начала координат, как только встречается с отрезком $(-d, d)$ оси абсцисс, соответствующим мертвой зоне.

4.3. Превращения энергии при затухающих собственных колебаниях

Пока маховик торсионного осциллятора вращается в одном направлении, действующий на него момент силы сухого трения постоянен (и равен N_{\max}), поскольку сила сухого трения скольжения не зависит от скорости. При этом движении полная механическая энергия осциллятора уменьшается пропорционально пройденному маховиком угловому расстоянию $\Delta\varphi$, так как (отрицательная) работа $-N_{\max}\Delta\varphi$ постоянного момента силы трения пропорциональна углу поворота $\Delta\varphi$. Поэтому полная энергия зависит от углового положения ротора φ по линейному закону, что хорошо видно из рис. 4, на котором показана параболическая потенциальная яма, соответствующая спиральной пружине, подчиняющейся закону Гука. Изображающая точка, ордината которой равна мгновенному значению полной энергии $E(\varphi)$ осциллятора, а абсцисса равна углу φ , при колебаниях осциллятора перемещается от одного берега этой потенциальной ямы к другому, постепенно опускаясь на ее дно. Траектория изображающей точки состоит из прямолинейных отрезков отрицательного наклона, соединяющих берега параболической потенциальной ямы.

Однако зависимость полной энергии осциллятора от времени $E(t)$ при этом не будет линейной, поскольку ротор вращается неравномерно. Скорость рассеяния механической энергии $-dE/dt$ пропорциональна величине угловой скорости $|\dot{\varphi}(t)|$. Поэтому скорость диссипации механической энергии из-за трения достигает максимума в те моменты, когда максимальна угловая скорость ротора $\dot{\varphi}$, то есть когда ротор пересекает

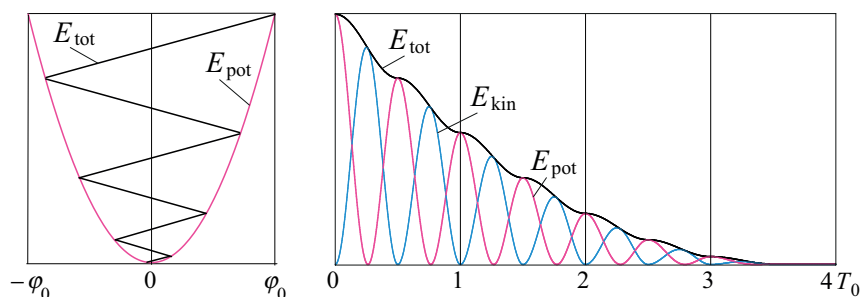


Рис. 4. Превращения разных видов энергии осциллятора при колебаниях, затухающих под действием сухого трения

границы мертвой зоны. Вблизи положений наибольшего отклонения, где угловая скорость ротора мала, скорость рассеяния механической энергии уменьшается.

В противоположность случаю вязкого трения, при сухом трении некоторая (небольшая) часть первоначальной энергии осциллятора может остаться в виде механической энергии после полного прекращения колебаний. Так будет, если окончательная остановка ротора произойдет не в средней точке зоны застоя. В таком случае пружина останется слегка деформированной, и потенциальная энергия упругой деформации не обратится в нуль. Остаточная механическая энергия осциллятора не может превышать значения $Dd^2/2 = N_{\max}d/2$.

Если начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, то есть если начальная энергия много больше значения $Dd^2/2$, осциллятор совершит большое число колебаний до полной остановки. В этом случае имеет смысл рассматривать полную энергию $\langle E(t) \rangle$, усредненную за период колебаний. Зависимость средней энергии от времени $\langle E(t) \rangle$ на протяжении большого числа колебаний будет квадратичной, поскольку амплитуда колебаний при сухом трении убывает со временем по линейному закону, а энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Пусть t_f – момент времени, соответствующий полному прекращению колебаний. Тогда в некоторый момент времени $t < t_f$ полная энергия $\langle E(t) \rangle$, усредненная по периоду колебаний, пропорциональна $(t_f - t)^2$. Это выражение (применимое, разумеется, только для $t < t_f$) строго справедливо только тогда, когда остановка осциллятора происходит в середине мертвой зоны. Если это не так, то небольшая часть энергии после прекращения колебаний остается в виде потенциальной энергии пружины. Тогда приведенное выражение будет верным лишь приближенно.

4.4. Роль вязкого трения

В реальных физических системах сухое трение всегда в большей или меньшей степени сопровождается вязким трением. В этом случае затухание колебаний осциллятора можно исследовать описанным выше способом, а именно, поэтапным решением уравнений (4)–(5). В качестве начальных условий для очередного полуцикла колебаний нужно использовать значения угла отклонения и угловой скорости ротора в конце предыдущего полуцикла. Иными словами, решения уравнений для соседних временных интервалов «сшиваются» приравниванием угловых отклонений на общей границе этих интервалов при нулевых значениях угловых скоростей.

Наглядное представление об эволюции механического состояния осциллятора, колебания которого затухают под одновременным действием сухого и вязкого трения, можно получить с помощью фазовой диаграммы. В отличие от случая только сухого трения, траектория в фазовом пространстве образована уже не последовательностью соединяющихся полуэллипсов (или полуокружностей) уменьшающегося размера, а последовательностью полупетель скручивающихся спиральных кривых, характерных для линейного осциллятора с вязким трением. Фокусы спиралей для соседних полупетель поочередно располагаются в точках, соответствующих левой и правой границам мертвой зоны.

Чтобы сравнить относительную роль вязкого и сухого трения в процессе затухания колебаний, ниже мы рассматриваем уменьшение амплитуды колебаний под действием каждого из этих факторов на протяжении одного цикла.

Как было установлено ранее, из-за сухого трения на любой стадии процесса это уменьшение составляет удвоенную ширину мертвой зоны, то есть $4d$. В свою очередь, вязкое трение уменьшает амплитуду за один цикл на величину, пропорциональную текущему значению амплитуды колебаний. При $\gamma T_0 \ll 1$, то есть при сравнительно больших значениях добротности Q осциллятора (напомним, что $Q = \omega_0 / 2\gamma$), выражение для уменьшения амплитуды за один период Δa из-за вязкого трения можно разложить в ряд:

$$\Delta a = a(1 - e^{-\gamma T_0}) \approx a\gamma T_0 = a\gamma \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi a}{Q}. \quad (6)$$

Приравнивая Δa удвоенной ширине $4d$ мертвой зоны, находим значение амплитуды \tilde{a} , которое разделяет случаи преобладания одного вида трения над другим:

$$\tilde{a} = \frac{4d}{\gamma T_0} = \frac{4}{\pi} Qd \approx Qd. \quad (7)$$

Если текущее значение амплитуды превышает \tilde{a} , доминирует роль вязкого трения. И наоборот, когда амплитуда меньше, чем \tilde{a} , преобладает влияние сухого трения.

Когда начальное возбуждение осциллятора достаточно сильное, амплитуда колебаний может превышать значение $\tilde{a} \approx Qd$. В таком случае затухание колебаний на начальном этапе определяется преимущественно вязким трением. На фазовой диаграмме уменьшение горизонтального размера (сжатие) нескольких первых витков из-за вязкого трения превышает ширину мертвой зоны. Для затухания колебаний это сжатие первых витков значительно превышает эффект чередования положений фокусов соседних полувитков от одной границы мертвой зоны к другой из-за сухого трения.

После того, как амплитуда станет меньше значения \tilde{a} (то есть при $a < \tilde{a} = Qd$), эффект сухого трения становится преобладающим. На фазовой траектории это преобладание проявляется в том, что чередование фокусов соседних полувитков между точками $-d$ и d играет большую роль в скручивании кривой, нежели сжатие ее витков из-за вязкого трения. В конце концов фазовая траектория упирается в отрезок оси абсцисс, соответствующий зоне застоя, чему соответствует полное прекращение колебаний.

При очень сильном вязком трении, когда добротность осциллятора Q меньше критического значения 0.5 (когда $\gamma > \omega_0$), после начального отклонения за пределы зоны застоя (на угол, превышающий d) отпущенный без начального толчка ротор будет асимптотически приближаться к ближайшей границе зоны застоя, не совершая колебаний. Полная остановка ротора произойдет на границе зоны застоя.

5. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С СУХИМ ТРЕНИЕМ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В этом разделе рассматриваются закономерности вынужденных колебаний в условиях резонанса, то есть когда частота возбуждения ω совпадает с частотой собственных колебаний ω_0 осциллятора ($T = T_0 = 2\pi/\omega_0$). Вообще говоря, при достаточно сильном трении при обращении скорости ротора в нуль могут происходить «залипания», то есть остановки ротора конечной длительности. Однако, если амплитуда θ_0 возбуждающего шатуна в уравнениях (4)–(5) превышает некоторое пороговое значение, происходят только мгновенные обращения скорости ротора в нуль в моменты изменений направления вращения, и колебания ротора происходят без «залипаний». При этом амплитуда таких резонансных колебаний в отсутствие вязкого трения растет неограниченно.

5.1. Моделирование резонансных колебаний

Пример резонансных колебаний при превышении порога для осциллятора, первоначально находящегося в состоянии покоя у левой границы зоны застоя, показан на рис. 5. Фазовая траектория и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ получены с помощью компьютерного моделирования, основанного на численном интегрировании уравнений (4)–(5). Обратите внимание на линейный рост амплитуды колебаний: последовательность максимальных отклонений ротора образует арифметическую прогрессию. Далее мы рассчитаем аналитически порог возбуждения таких растущих колебаний и увеличение амплитуды после каждого цикла возбуждения.

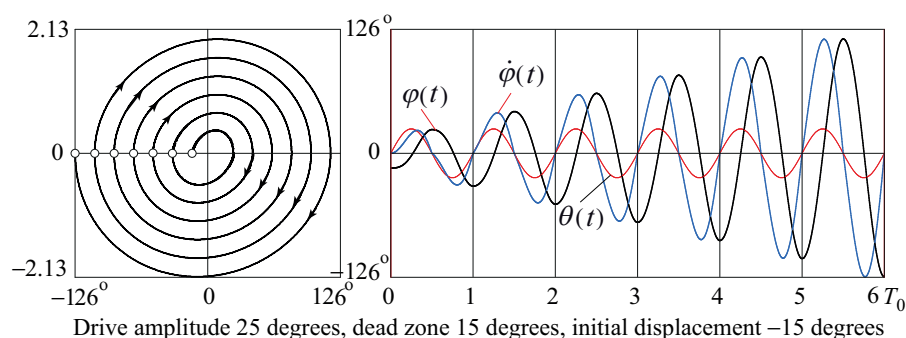


Рис. 5. Фазовая траектория с сечениями Пуанкаре (слева) и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ (справа) для резонансных колебаний при сухом трении в условиях превышения порога возбуждения

Для упрощения анализа выберем начальное отклонение ротора $\varphi(0)$ совпадающим с левой границей зоны застоя: $\varphi(0) = -d$. Начальную угловую скорость положим равной нулю: $\dot{\varphi}(0) = 0$. Такие начальные условия обеспечивают непрерывное скольжение (движение ротора без залипаний) с самого начала вынужденных колебаний. В течение каждого цикла возбуждения ротор дважды изменяет направление вращения. На протяжении первой половины периода возбуждения ($0 < t < T_0/2$) угловая скорость положительна ($\dot{\varphi}(t) > 0$), и поэтому нужно использовать уравнение (4). Решение этого уравнения (при $\gamma = 0$), удовлетворяющее сформулированным выше начальным условиям, можно записать следующим образом:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2}\theta_0(\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t) - d, \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\theta_0\omega_0^2 t \sin \omega_0 t, \quad 0 < t < T_0/2. \quad (8)$$

В соответствии с выражением (8), следующее максимальное отклонение вправо достигается при $t = T_0/2$ и составляет $\frac{1}{2}\pi\theta_0 - d$. Это отклонение по величине больше предыдущего (то есть начального) отклонения $-d$ в левую сторону на $\frac{1}{2}\pi\theta_0 - 2d$.

Чтобы найти увеличение амплитуды в течение второй половины цикла возбуждения, когда вращение ротора происходит в противоположную сторону, нужно воспользоваться уравнением (5). Аналитическое решение этого уравнения приведено в следующем разделе. Оказывается, что на протяжении второй половины цикла возбуждения амплитуда возрастает на такую же величину, как и за первую половину цикла. Поэтому за полный цикл амплитуда вырастает на $\pi\theta_0 - 4d$. В частности, при $\theta_0 = 25^\circ$ и $d = 15^\circ$ (эти значения использованы при моделировании, результаты которого показаны на рис. 5) амплитуда должна возрасти за каждый цикл на 18.54° . Моделирование показывает (рис. 5), что на протяжении первых шести циклов амплитуда увеличилась на $126^\circ - 15^\circ = 111^\circ$, что для увеличения за один цикл дает значение 18.5° , которое хорошо согласуется с предсказанным теоретически.

5.2. Аналитическое решение для второй половины цикла возбуждения

Для первой половины цикла резонансного возбуждения ($\omega = \omega_0$) движение ротора описывается уравнением (8) при условии, что в начальный момент ротор находится в состоянии покоя ($\dot{\varphi}(0) = 0$) в точности на левой границе зоны застоя $\varphi(0) = -d$. При каком-либо ином начальном отклонении от положения равновесия $\varphi(0) = \varphi_0$ в левую сторону ($\varphi_0 < 0$), лежащем за пределами зоны застоя ($|\varphi_0| > d$), и нулевой начальной скорости $\dot{\varphi}(0) = 0$, движение ротора тоже с самого начала будет происходить без остановок конечной длительности (без залипаний). На протяжении интервала $0 < t < T_0/2$ это движение описывается следующим выражением:

$$\varphi(t) = (\varphi_0 + d) \cos \omega_0 t - \frac{1}{2}\theta_0(\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t) - d, \quad 0 < t < T_0/2. \quad (9)$$

В конце первой половины цикла возбуждения (при $t = T_0/2$) угловая скорость ротора обращается в нуль, а его отклонение в левую сторону достигает значения $\varphi_1 = -\varphi_0 + \frac{1}{2}\theta_0\pi - 2d$. Эти значения угла отклонения и угловой скорости нужно использовать в качестве начальных условий при $t = T_0/2$ для дифференциального уравнения (5), описывающего (при $\gamma = 0$) вторую половину периода ($T_0/2 < t < T_0$) вынужденного движения, в течение которого $\dot{\varphi} < 0$. Чтобы решить это уравнение, началом отсчета времени $t = 0$ удобно считать момент $T_0/2$. В новых обозначениях уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi - d) = -\omega_0^2\theta_0 \sin \omega_0 t. \quad (10)$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0) = \varphi_1$ и $\dot{\varphi}(0) = 0$, удобно записать следующим образом:

$$\varphi(t) = (\varphi_1 - d) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}\theta_0(\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t) + d. \quad (11)$$

Чтобы найти угловое положение $\varphi(T_0)$ и угловую скорость $\dot{\varphi}(T_0)$ ротора к концу первого цикла возбуждения, нужно подставить $t = T_0/2$ в выражение (11):

$$\varphi(T_0) = -\varphi_1 + d - \frac{1}{2}\theta_0\pi + d = \varphi_0 - \theta_0\pi + 4d. \quad (12)$$

Таким образом, максимальное отклонение влево возросло за первый цикл возбуждения на величину

$$|\varphi(T_0) - \varphi_0| = \pi\theta_0 - 4d. \quad (13)$$

Этот инкремент амплитуды не зависит от начального отклонения φ_0 . Таким образом, последовательность максимальных отклонений ротора при резонансных колебаниях осциллятора с сухим трением образует возрастающую арифметическую прогрессию.

В случае $d = 0$ (нулевая ширина зоны застоя), то есть при полном отсутствии сухого трения, решение (9) принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t - \frac{1}{2}\theta_0(\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t). \quad (14)$$

Очевидно, что при начальных условиях $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ это решение справедливо при любых t , а не только для первой половины цикла возбуждения $0 < t < T_0/2$. Согласно выражению (14), при полном отсутствии трения (как сухого, так и вязкого) амплитуда резонансных вынужденных колебаний возрастает на протяжении каждого цикла возбуждения на одну и ту же величину $\pi\theta_0$. Если осциллятор возбуждается из состояния покоя в положении равновесия, амплитуда резонансных колебаний с самого начала растет по линейному закону. Этот рост продолжается неограниченно. Такое поведение легко объяснить на основе энергетических соображений, если учесть определенное соотношение фаз между крутильными колебаниями ротора и синусоидально изменяющимся во времени внешним моментом силы упругости, приложенным к ротору со стороны пружины: при резонансе этот момент упругой силы все время действует в направлении вращения ротора, постоянно увеличивая энергию осциллятора.

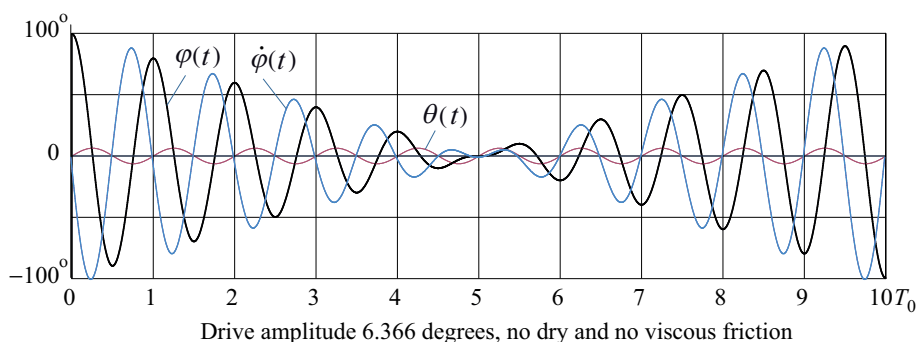


Рис. 6. Резонансные колебания в отсутствие трения при ненулевом начальном отклонении

Однако, если в начальный момент ротор отклонен в положительном направлении ($\varphi(0) > 0$), на начальном этапе вынужденных колебаний момент силы упругости направлен противоположно угловой скорости, и, несмотря на точную настройку внешнего воздействия в резонанс с собственной частотой, амплитуда колебаний *уменьшается* за каждый цикл на величину $\pi\theta_0$. В таких условиях энергия передается от осциллятора возбуждающему шатуну. Такая ситуация иллюстрируется графиками на рис. 6. После того как амплитуда уменьшится до нуля, фазовые соотношения между движением возбуждающего шатуна и ротора становятся благоприятными для передачи энергии осциллятору от внешнего источника, приводящего в движение шатун. Амплитуда вынужденных колебаний ротора начинает расти неограниченно. Первоначальное убывание амплитуды

со временем происходит по линейному закону. В отсутствие сухого трения последующий линейный рост амплитуды происходит с той же скоростью, что и первоначальное уменьшение амплитуды. Ниже мы увидим, что при наличии сухого трения в аналогичной ситуации трение ускоряет уменьшение амплитуды первоначальных колебаний и замедляет последующий рост амплитуды.

5.3. Порог резонансного возбуждения колебаний

Рост амплитуды вынужденных колебаний происходит при условии, что ее инкремент $\pi\theta_0 - 4d$ за цикл возбуждения (см. (13)) положителен. Поэтому порог резонансного возбуждения для осциллятора с сухим трением дается следующим условием:

$$\theta_0 > \frac{4}{\pi} d, \quad (\theta_0)_{\min} = \frac{4}{\pi} d. \quad (15)$$

При заданной ширине d мертвой зоны (то есть при заданной величине сухого трения) выражение (15) определяет критическое (минимальное) значение $(\theta_0)_{\min}$ амплитуды возбуждающего шатуна, которое после сравнительно непродолжительного переходного процесса обеспечивает вынужденные колебания ротора без залипаний, то есть без остановок конечной длительности.

Тем не менее, в течение переходного процесса, в зависимости от начальных условий, залипания возможны. При превышении порога (когда $\theta_0 > (\theta_0)_{\min}$) после окончания переходного процесса, в начальный момент каждого очередного цикла возбуждения угловая скорость ротора $\dot{\varphi}(t_n)$ равна нулю: $\dot{\varphi}(nT) = 0$. Это значит, что сечения Пуанкаре фазовой траектории (соответствующие моментам времени $t_n = nT$) в течение переходного процесса приближаются к оси абсцисс и в дальнейшем остаются на отрицательной стороне этой оси. Поскольку инкремент максимального отклонения остается неизменным от цикла к циклу, точки сечений Пуанкаре на оси абсцисс расположены эквидистантно (см. рис. 5).

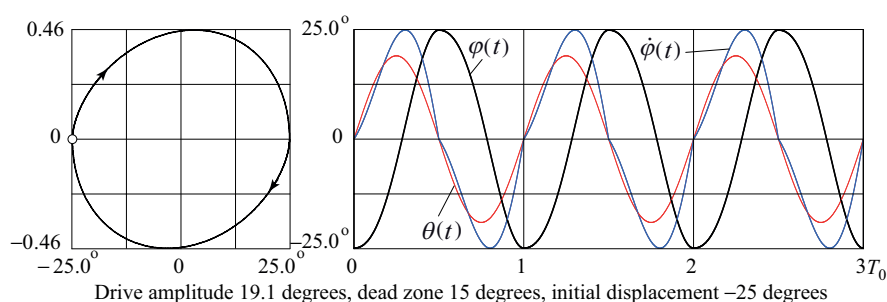


Рис. 7. Стационарные колебания в условиях порога возбуждения

Периодические колебания неизменной амплитуды, происходящие в условиях порога возбуждения, показаны на рис. 7. При произвольных начальных значениях φ и $\dot{\varphi}$ фазовая траектория постепенно приближается к некоторому предельному циклу, который подобен циклу, показанному в левой части рис. 7. Амплитуда вынужденных стационарных колебаний, происходящих при выполнении пороговых условий, зависит от начальных условий. Если начальная скорость равна нулю ($\dot{\varphi}(0) = 0$), стационарные колебания

происходят с самого начала, то есть переходный процесс отсутствует. При этом, разумеется, начальное отклонение $\varphi(0)$ должно быть отрицательным и должно лежать за пределами мертвой зоны: $\varphi(0) < 0$, $|\varphi(0)| \geq d$. Амплитуда таких колебаний равна $|\varphi(0)|$. Этот режим колебаний неустойчив по отношению к изменениям параметров θ_0 и d : даже небольшое увеличение амплитуды возбуждающего шатуна или уменьшение ширины мертвой зоны приводит к неограниченному росту амплитуды колебаний ротора.

Если амплитуда возбуждающего шатуна θ_0 меньше критического значения $(\theta_0)_{\min}$, которое дается выражением (15), но превышает ширину d зоны застоя, после окончания переходного процесса устанавливается стационарный режим вынужденных колебаний с двумя фазами скольжения и двумя залипаниями (остановками конечной длительности) на протяжении каждого цикла возбуждения. Если θ_0 меньше ширины d зоны застоя, ротор, в зависимости от начальных условий, либо с самого начала остается неподвижным, либо совершает несколько колебаний с залипаниями, после чего совсем останавливается в некоторой точке мертвой зоны.

5.4. Резонансное возбуждение при сухом и вязком трении

Резонансный рост амплитуды при превышении порога оказывается ограниченным, если вращение ротора сопровождается даже небольшим вязким трением. В системе с таким двояким затуханием стационарные колебания устанавливаются в конце концов при произвольных начальных условиях. Пример моделирования резонансных колебаний в системе, где одновременно действуют сухое и вязкое трение, показан на рис. 8. Уравнения (4)–(5) позволяют рассчитать амплитуду a таких резонансных колебаний симметричной формы.

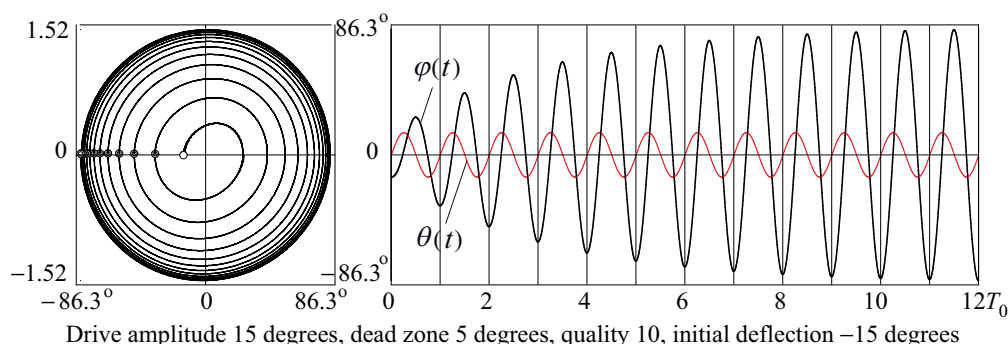


Рис. 8. Резонансные колебания в системе с сухим и вязким трением

Выберем начало отсчета времени $t = 0$ совпадающим с началом очередного цикла возбуждения. В этот момент ротор оказывается повернутым в крайнее левое положение ($\varphi(0) = -a$), а его угловая скорость обращается в нуль ($\dot{\varphi}(0) = 0$). В течение первой половины следующего цикла возбуждения ($0 < t < T_0/2$) ротор поворачивается вправо, так что его угловая скорость $\dot{\varphi}$ положительна. Поэтому нужно использовать уравнение (4) с $\omega = \omega_0$ в правой части. Удобно ввести вместо $\varphi(t)$ новую неизвестную функцию $\psi(t) = \varphi(t) + d$, которая, в соответствии с уравнением (4), удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{\psi} + 2\gamma\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = \omega_0^2\theta_0 \sin \omega_0 t. \quad (16)$$

Периодическое частное решение этого уравнения можно искать в виде $\psi(t) = A \cos \omega_0 t$. Эта функция удовлетворяет уравнению (16), если $A = -(\omega_0/2\gamma)\theta_0 = -Q\theta_0$. Затем к этому частному решению нужно добавить общее решение соответствующего однородного уравнения (с произвольными постоянными C и S):

$$\psi(t) = -Q\theta_0 \cos \omega_0 t + (C \cos \omega_0 t + S \sin \omega_0 t) \exp(-\gamma t). \quad (17)$$

Из начального условия $\dot{\psi}(0) = 0$ следует, что в (17) $S = (\gamma/\omega_0)C$. Для нахождения C потребуем, чтобы в рассматриваемом установившемся симметричном режиме максимальные отклонения ротора в обе стороны были одинаковы: $\varphi(0) = -\varphi(T_0/2)$. Из этого условия находим:

$$C = \frac{2d}{1 - \exp(-\gamma T_0/2)} = \frac{2d}{1 - \exp(-\pi/2Q)}. \quad (18)$$

Подставляя найденные значения C и S в уравнение (17), получаем зависимость от времени угла отклонения $\varphi(t) = \psi(t) - d$ для первой половины цикла возбуждения. Искомая амплитуда a этих установившихся колебаний равна $-\varphi(0)$:

$$a = Q\theta_0 - d \left(\frac{2}{1 - \exp(-\pi/2Q)} - 1 \right) \approx Q \left(\theta_0 - \frac{4d}{\pi} \right). \quad (19)$$

Последнее приближенное выражение справедливо в случае относительно слабого вязкого трения, когда $Q \gg 1$. В отсутствие сухого трения (при $d = 0$) резонансный рост амплитуды ограничен из-за вязкого трения приближенным значением $Q\theta_0$, которое в Q раз больше, чем амплитуда θ_0 возбуждающего шатуна. Это ограничение описывается первым членом в выражении (19). При наличии сухого трения установившаяся амплитуда приблизительно в Q раз больше, чем угловое превышение амплитуды шатуна θ_0 над ее пороговым значением $4d/\pi$.

Подчеркнем, что сухое трение само по себе не в состоянии ограничить резонансный рост амплитуды при превышении порога возбуждения. Тем не менее, выражение (19) показывает, что при добавлении сухого трения в систему с вязким трением амплитуда установившихся резонансных колебаний меньше значения $Q\theta_0$, определяемого только вязким трением. Как показывает численное моделирование (рис. 8), при $\theta_0 = 15^\circ$ и $Q = 10$ установившаяся резонансная амплитуда составляет всего лишь 86.3° , если ширина мертвой зоны d равна 5° (сравните это значение с $Q\theta_0 = 150^\circ$ при $d = 0$). Полученное при моделировании значение 86.3° находится в хорошем согласии с теоретическим результатом, выражаемым формулой (19), согласно которой амплитуда установившихся колебаний должна составлять 86.2° .

5.5. Резонансные колебания осциллятора с сухим трением при начальном отклонении

В условиях точной настройки в резонанс (при $\omega = \omega_0$) энергия передается осциллятору от внешнего источника (от возбуждающего шатуна) с максимальной эффективностью при условии, что в начале каждого цикла возбуждения ротор оказывается в положении максимального отклонения влево. Действительно, в этом случае синусоидально изменяющийся внешний момент, приложенный к ротору (через пружину) со стороны возбуждающего шатуна, на протяжении всего цикла возбуждения действует в направлении вращения ротора. При превышении порога возбуждения (при $\pi\theta_0 > 4d$) этот момент больше момента силы сухого трения, и амплитуда колебаний растет со временем по линейному закону (см. рис. 5), увеличиваясь за каждый цикл на $\pi\theta_0 - 4d$.

Напротив, если в начале цикла возбуждения ротор оказывается в положении максимального отклонения вправо, действующий со стороны пружины внешний момент направлен в течение всего цикла противоположно угловой скорости ротора, так же как и момент силы трения. В этом случае на протяжении каждого цикла амплитуда уменьшается на величину $\pi\theta_0 + 4d$. Когда амплитуда уменьшается до нуля, соотношение фаз между ротором и шатуном изменяется на противоположное и становится благоприятным для передачи энергии от внешнего источника осциллятору: амплитуда начинает возрастать.

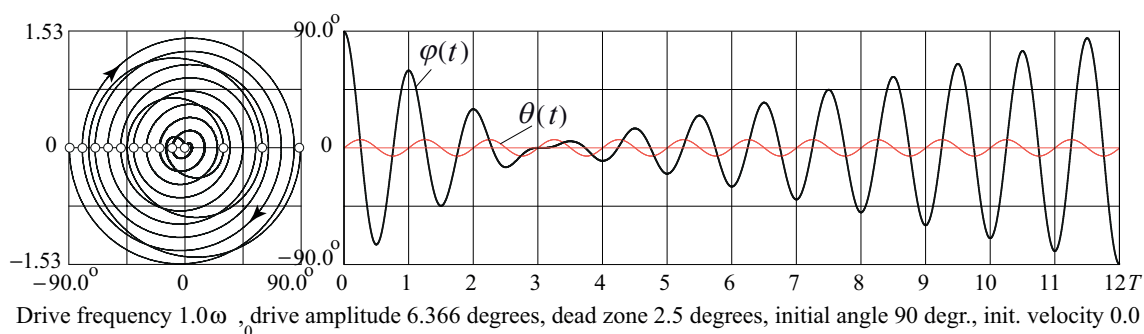


Рис. 9. Фазовая траектория с сечениями Пуанкаре и график $\varphi(t)$ для резонансных колебаний осциллятора с сухим трением при начальном отклонении $\varphi(0) = +90^\circ$

Пример такого поведения осциллятора показан на рис. 9. При амплитуде шатуна $\theta_0 = 6.366^\circ$ и ширине мертвой зоны 2.5° на начальной стадии процесса амплитуда линейно убывает, уменьшаясь за каждый цикл на $\pi\theta_0 + 4d = 30^\circ$. После трех полных циклов возбуждения амплитуда уменьшается от начального значения 90° до нуля. На протяжении дальнейшего резонансного линейного роста амплитуда увеличивается за каждый цикл на $\pi\theta_0 - 4d = 10^\circ$ и после следующих девяти циклов возбуждения достигает 90° .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрены некоторые особенности собственных и вынужденных колебаний простой механической системы — торсионного пружинного осциллятора с сухим и вязким трением. Величина сухого трения характеризуется угловой шириной d мертвой зоны.

Показано, что в отсутствие возбуждения амплитуда собственных колебаний под действием сухого трения уменьшается за каждый цикл на одну и ту же величину $4d$, пропорциональную ширине мертвой зоны: последовательность максимальных отклонений образует убывающую арифметическую прогрессию, и колебания полностью прекращаются через конечное число циклов.

При действии внешнего момента, синусоидально зависящего от времени, сухое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды резонансных вынужденных колебаний: если амплитуда θ_0 возбуждения превышает пороговое значение $4d/\pi$, в условиях резонанса ($\omega = \omega_0$) амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет со временем по линейному закону, увеличиваясь за каждый цикл на $\pi\theta_0 - 4d$.

В системе с вязким трением установившаяся амплитуда резонансных колебаний в Q раз больше амплитуды возбуждения θ_0 (Q – добротность осциллятора). Сухое трение

приводит к уменьшению амплитуды установившихся колебаний: эта амплитуда приблизительно в Q раз больше, чем угловое превышение амплитуды возбуждения θ_0 над ее пороговым значением $4d/\pi$.

Во второй части статьи рассмотрены особенности вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением, возбуждаемых на нерезонансных и субрезонансных ($\omega = \omega_0/n$) частотах.

Список литературы

1. *Pippard A.B.* The physics of vibration (The simple classical vibrator). Cambridge University Press, 1978.
2. *Butikov E.I.* Physics of Oscillations. User's Manual. American Institute of Physics, Physics Academic Software, New York, 1996.
3. *Den Hartog J.P.* Forced vibrations with combined Coulomb and viscous damping, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 1930. № 53. P. 107–115,
4. *Shaw S.W.* On the dynamic response of a system with dry friction // J. Sound Vib., 1986. № 108. P. 305–325.
5. *Hong H.-K., Liu C.-S.* Non-sticking oscillation formulae for Coulomb friction under harmonic loading // J. Sound Vib., 2001. № 244. P. 883–898.
6. *Csernák G., Stépán G.* On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator // J. Sound Vib., 2006. № 295. P. 649–658.
7. *Pratt E., Léger A., Xiang Zhang.* Study of a transition in the qualitative behavior of a simple oscillator with Coulomb friction // Nonlinear Dynamics, 2013. № 74. P. 517–531.
8. *Luo A.C.J.* Regularity and Complexity in Dynamical Systems. Springer, 2011.
9. *Butikov E.I.* Torsion Pendulum with Dry and Viscous Friction (a simulation program), see on the web <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/DryViscOsc.html>, 2013.
10. *Elmer F.J.* Nonlinear dynamics of dry friction // J. Phys. A: Math. Gen., 1997. № 30. P. 6057–6063.
11. *Awrejcewicz J., Olejnik P.* Analysis of dynamic systems with various friction laws // Applied Mechanics Reviews, 2005. № 58. P. 389–411.

OSCILLATOR WITH DRY FRICTION. I. Natural and Resonant Forced Oscillations

Butikov E. I.

Abstract

Natural (unforced) and resonant forced oscillations of a torsion spring oscillator with dry friction are investigated both analytically and with the help of computer simulations. A simplified mathematical model of dry friction (Coulomb friction) is used, which nevertheless successfully explains many peculiarities in behavior of various oscillatory systems with dry friction. We show that the amplitude of natural oscillations diminishes under dry friction linearly with time, and the motion of the oscillator stops dead after a finite number of cycles. The amplitude of forced oscillations excited by the sinusoidal external torque grows indefinitely if the threshold of excitation is exceeded. The second part of the paper deals with the peculiarities of forced oscillations excited at non-resonant and sub-resonant frequencies.

Keywords: *dry friction, natural oscillations, sinusoidal forcing, resonance, forced oscillations, threshold of excitation.*

Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета СПбГУ,
eugene.butikov@gmail.com

© Наши авторы, 2015.
Our authors, 2015.